Matemáticas Financieras

Francisco Pérez Hernández
Departamento de Financiación e Investigación de la
Universidad Autónoma de Madrid

Objetivo del curso:

- Profundizar en los fundamentos del cálculo financiero, necesarios para su aplicación en posteriores asignaturas.
- Adquisición de los principales conceptos matemáticos requeridos para la valoración de operaciones financieras.
- Adquirir la habilidad de analizar situaciones reales relacionadas con el cálculo de leyes, rentas financieras, tipos de interés y operaciones financieras.

Contenidos del Programa:

Tema I. Valoración del dinero en el Tiempo

I.1 Capitales financieros.
I.2 Leyes financieras.
I.3 Capitalización simple y compuesta.
I.4 Descuento Simple Comercial y Racional. Descuento Compuesto.
I.5 Tipo de Interés Anual y Tipo de Interés Fraccionado.
I.6 Suma y desdoblamiento de capitales.

Tema II. Rentas Financieras

II.1 Concepto y clasificación de rentas.
II.2 Valor capital de una renta.
II.3 Valoración de rentas constantes.
II.4 Valoración de rentas variables.
II.5 Rentas fraccionadas.

Tema III. Operaciones Financieras

III.1 Concepto y clasificación de las operaciones financieras.
III.2 Equivalencia financiera.
III.3 Saldo Financiero.
III.4 Operaciones financieras simples.

MF

Tema IV. Operaciones Financieras Compuestas

IV.1 Operaciones de amortización.
IV.2 Estudio de las principales modalidades de préstamos.
- IV.2.1 Sistema francés.
- IV.2.2 Cuotas de amortización constantes.
- IV.2.3 Sistema americano.
- IV.2.4 Términos variables.

IV.4 Prestamos a tipo de interés variable.
IV.5 Operaciones de constitución de un capital.

Tema V. Coste y Rentabilidad de las Operaciones Financieras

V.1 Coste o rendimiento de las OF Simples.
V.2 Coste o rendimiento de las OF Compuestas.
V.3 Operaciones con características comerciales.
V.4 Tipo Anual Equivalente (TAE).

EE

Tema I. VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO

Introducción

Los bienes por esencia económica tienen un **valor presente** y un **valor futuro**, puesto que gracias a poder disponer de ellos, se generan beneficios, que a su vez se pueden reinvertir.

Dinero = Bien

Matemáticamente:

$$\Delta V = V_1 - V_0 \qquad\qquad V_1 = V_0 - \Delta V$$

y considerando que (ΔV) puede representarse como porcentaje (p) del valor base (V_0), tenemos:

$$V_1 = V_0 - pV_0 \longrightarrow V_1 = V_0(1+p)$$

para obtener el valor presente, conociendo el valor futuro, despejando tendríamos:

$$V_0 = \frac{V_1}{1+p}$$

Si aplicamos la anterior expresión al concepto *dinero,* el incremento porcentual se denomina **TIPOS DE INTERÉS**. Siendo "i" en lugar de "p", mientras que a "V" le llamaremos **CUANTÍA**.

Así entonces:

$$C = C_0(1+i) \qquad \text{ó} \qquad C_0 = \frac{C_1}{1+i}$$

Así, el valor del dinero en el tiempo, cuya medida es el tipo de interés, lo podemos entender desde una doble perspectiva:

- El cambio de valor del momento actual (0) a otro momento posterior (1). Podemos tener revalorización o depreciación.

- El precio que tiene su uso o disposición, dado que lo podemos prestar o contratar en un banco o una empresa de inversión.

Ejemplo:

A un prestamista se le presentan 2 clientes potenciales, cada uno de los cuales le ofrece devolverle el préstamo de 100 más 10 en concepto de intereses.

¿A quién le damos el préstamo?

Cliente / Periodo	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Total**
A	-100	50	20	10	10	20	**110**
B	-100	75	15	20	0	0	**110**

En definitiva, de forma matemática,

valor del dinero = f (disponibilidad, riesgo,…)

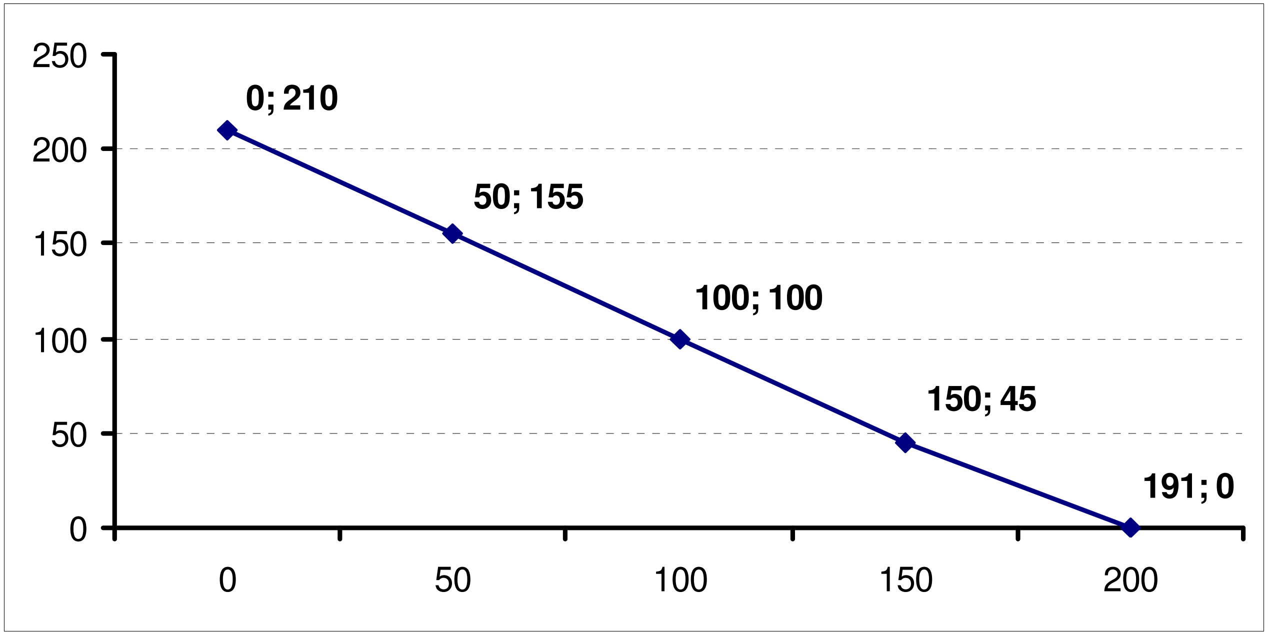
entendiéndose por disponibilidad a la capacidad de poseer una cosa, y como sinónimo de cantidad de tiempo.

Así, la naturaleza del tipo de interés tiene dos perspectivas totalmente relacionadas entre sí:

1. El valor del dinero en el tiempo es igual al beneficio que se genera en el tiempo.

2. Tasa de sustitución entre una cuantía presente y la misma cuantía en el futuro.

Este gráfico muestra la curva de una persona que cobrará 200 € (100 ahora (momento 0) y el resto en el periodo 1



La pendiente de la curva es –(1+i), que en este caso al hacer los cálculos con un 10% su valor sería -1,1. Es decir, si incrementamos el valor de t_0 en 1 €, decrecería el valor en t_1 1,1.

Antes de entrar con los conceptos de capitales y leyes financieras es importante mencionar que existen dos tipos de variables (o medidas) del dinero:

1. Fondo o stock.

2. Corriente o flujo.

Además, existen 3 aspectos fundamentales de las valoraciones monetarias en el tiempo:

1. Se trabajan con flujos de tesorería (cash-flows).

2. Se parte de t0, t1, t2, … tn.

3. Los fondos se producen al principio o final de cada periodo.

I.1. Capitales Financieros

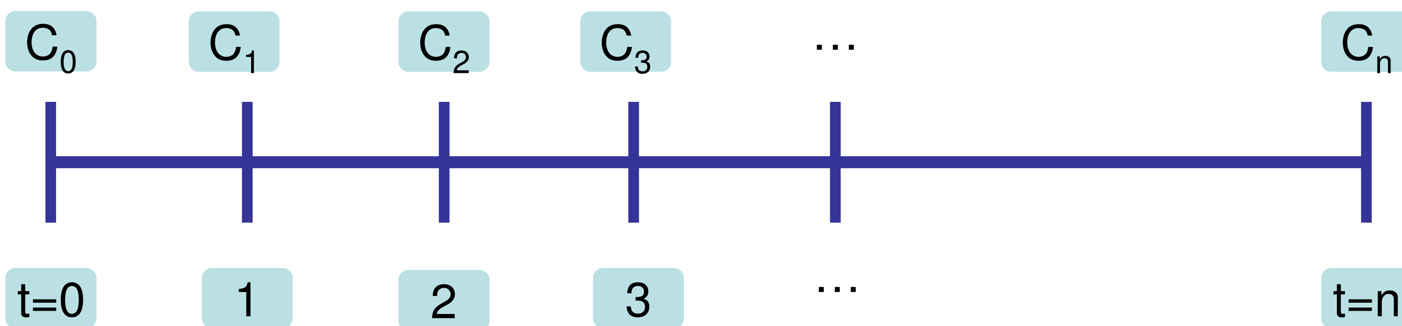
En los sistemas económicos se realizan continuamente operaciones financieras que consisten en la sustitución de unos ***capitales financieros*** por otros, en distintos momentos del tiempo.

Los **Capitales Financieros** son cobros, pagos o flujos de caja que se reciben o entregan en un momento del tiempo. Por tanto, un capital financiero tiene dos dimensiones: (C, t), siendo C capital y "t" el momento del tiempo en el que se cobra o paga.

Un capital financiero que se cobra o paga en "t", se puede expresar como Ct para t = 0, 1, 2,… n. Siendo:

t = 0 : momento presente o actual.
t = 1 : momento del tiempo 1 período después del momento actual.
t = n : momento final o plazo de una operación o vencimiento.

De forma gráfica:



Las principales operaciones financieras de las unidades económicas (sociedades no financieras, sociedades financieras, hogares etc.) son las siguientes:

Operaciones financieras de inversión: adquisición de activos que implica un desembolso hoy Co (un capital C en el momento del tiempo t=0 o momento actual) y una esperanza de cobros futuros o capitales Ct en distintos momentos del tiempo "t", para t = 1,2,…n.

Operaciones financieras de financiación que permiten disponer de un capital actual Co a cambio de una obligación de pago en el futuro Ct:

- Descuento de Letras de Cambio.
- Emisión de valores de renta variable.
- Emisión de bonos y obligaciones.
- Emisión de pagarés de empresa.
- Solicitud de préstamos y créditos.

Las operaciones financieras implican:

- La **sustitución** de unos capitales financieros Ct por otros con distinto vencimiento.
- La **valoración** de los capitales financieros Ct en el tiempo con expresiones matemáticas o leyes financieras.
- El **uso o aplicación** de un tipo de interés o precio del dinero. Un tipo de interés anual indica o bien una rentabilidad de las inversiones o bien un coste de la financiación.
- La **intervención** de dos partes en las operaciones financieras, la prestación y la contraprestación.
- El uso de instrumentos o activos financieros (Ej. letras, bonos etc.) como mecanismo de **reconocimiento** de derechos y obligaciones.

Recordemos, en las operaciones financieras intervienen dos partes (A y B) y para valorar esta operación es necesario plantear matemáticamente la **equivalencia financiera** de los capitales Ct que entregan ambas partes.

Por ejemplo:

Un depósito como operación de inversión para la empresa A que ingresa un capital hoy Co en un depósito o cuenta del Banco B. En este ejemplo el capital que **entrega A** es el que recibe B. Dicho capital financiero se entrega en el momento actual y es Co. La parte de la operación financiera que cede dinero espera una rentabilidad.

Posteriormente en el tiempo los capitales que **entrega B** son los que recibe A y corresponden a Intereses (Ct) y devolución del principal (Cn). Dichos capitales financieros los paga B que se a financiado al recibir el capital Co y que, por tanto, tiene un coste.

De todo lo dicho observamos que los elementos fundamentales de las operaciones financieras, además del capital y el tipo de interés, son:

- El origen de la operación (t=0)
- El final de la operación (t=n)
- El plazo o duración de la operación (1, 2, 3, ..., n)

Atendiendo a lo anterior, las operaciones pueden ser:

- A corto plazo. t = 0-1 año
- Mediano plazo. t = 1-3 años
- Largo plazo. t ≥ 5 años

Cuanto mayor sea el intervalo temporal de una operación financiera, mayor será su riesgo. Es decir,

$\uparrow t$ ----- $\uparrow R$ $\qquad\qquad$ $\downarrow t$ ----- $\downarrow R$

A efectos de la valoración financiera con expresiones matemáticas, son **dos tipos de operaciones financieras**:

- **Operaciones de Capitalización:**

  Cuando se invierte un capital financiero con el objetivo de obtener una rentabilidad en un futuro (n), el capital obtenido (Cn) debe ser superior al inicial (Co).

  $$Cn > Co$$

- **Operaciones de Descuento:**

  Cuando calculamos el valor de un capital financiero en el pasado. Por tanto, el capital obtenido en el momento 0 deberá ser inferior al valor actual (Cn).

  $$Co < Cn$$

I.2. Leyes Financieras

Para la valoración de cualquier tipo de operación financiera se aplican *expresiones matemáticas,* éstas son llamadas *LEYES FINANCIERAS*.

- **Leyes de Capitalización:**

  Expresiones matemáticas > 1. Valoración de capitales en el futuro

- **Leyes de Descuento:**

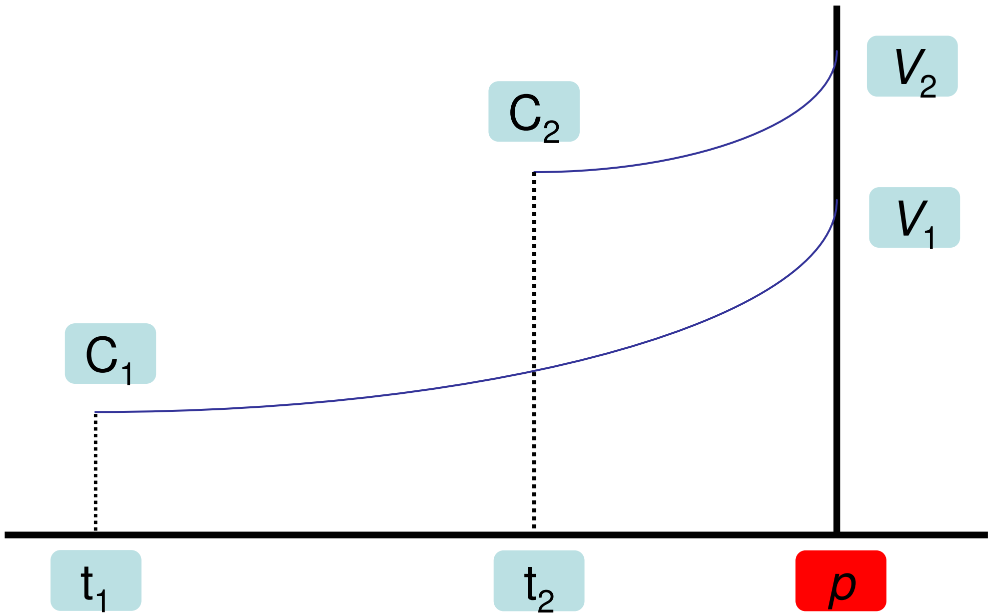
  Expresiones matemáticas < 1. Valoración de capitales en el pasado.

Al **criterio o regla** del que disponen los agentes económicos para la valoración de transacciones de capital u operaciones financieras, se les conoce como **LEYES FINANCIERAS**.

Para obtener el valor de un capital financiero en el futuro (***V***) se necesita de tres elementos: la cuantía inicial (***C***), el tiempo o periodo de duración de la cuantía (***t***) y (***p***) que es el punto de comparación o sustituto o equivalente financiero.

Es decir:

$$\boldsymbol{V = F\,(C,\, t,\, p)}$$



Se distinguen entre leyes de *capitalización* y de *descuento* en función de que el punto ***p*** de comparación se sitúe a la derecha de los capitales intervinientes (capitalización) o a la izquierda (descuento), anotándose con ***L(t;p)*** las leyes de capitalización y con ***A(t;p)*** las de descuento.

Son muchas las funciones matemáticas que podemos utilizar en el mundo financiero. Para resumir y con el objeto de mencionar las más utilizadas en valoraciones de operaciones financieras, las leyes financieras se pueden agrupar en 2 subconjuntos:

- **Leyes estacionarias:**
  Cuando sólo se tiene en cuenta el tiempo interno de la operación. $z = p - t$ ó $z = t - p$
- **Leyes sumativas:**
  Cuando en un intervalo de tiempo considerado no se acumulan intereses para producir nuevos intereses.
- **Leyes multiplicativas:**
  Cuando se acumulan intereses.

En las operaciones financieras se utilizan **leyes simples** o **compuestas** según el intervalo de tiempo:

- **A corto plazo:**

  Leyes simples, de capitalización y descuento.

- **A largo plazo:**

  Leyes compuestas, de capitalización y descuento

I.3. Capitalización Simple y Compuesta

La expresión matemática abreviada de la **capitalización simple** es:

$$L_1\ (t) = 1 + i * t$$

Siendo:

> $L_1\ (t)$: Capitalización de una cuantía
> i: tipo de interés efectivo anual (con $i > 0$)
> t: duración de la operación en años

Si aplicamos esta ley simple (a una función lineal) podemos obtener el valor de la cuantía que colocamos (lo llamaremos ***montante***) en un periodo o plazo ***n***. La cuantía ***M*** y los intereses generados ***I*** se obtienen así:

$$M = C * (1 + i * t) \quad y \quad I = C * i * t \quad ó \quad I = M - C$$

Montante o Cuantía Final

Cuantía inicial

Tipo de interés

Duración de la operación

Intereses obtenidos

Ya que la capitalización simple se utiliza en operaciones financieras a corto plazo (1 año), es común que ***t*** se exprese como fracción de año. Así, por ejemplo, cuando la duración se expresa en meses (***k***), el montante o los intereses obtenidos se anotarán así:

$$M = C * \left(1 + i\frac{k}{12}\right) \qquad I = C * i * \frac{k}{12}$$

Así, ***k/12*** medirá la fracción de año que representan los ***k*** meses.

Nota: cuando la duración se expresa en días, se utilizan dos tipos de años: el **civil o real** (365 días) o el **comercial** (360 días).

Casos prácticos

Ejemplo Nº 1

Un capital de 10.000 euros se "coloca" hoy a un tipo de interés del 6% anual durante un periodo de 75 días. Obtener, utilizando el año comercial (i_o=360 días):

a) Valor final de la cuantía (*V*) y los intereses que produce (I).

$$M = C * \left(1 + i\frac{k}{12}\right) \qquad M = 10.000 * \left(1 + 0{,}06\frac{75}{360}\right)$$

$$= 10.125 \text{ €}$$

$$I = M - C \qquad I = 10.125 - 10.000$$

$$= 125 \text{ €}$$

b) Los tipos de interés: semestral y trimestral.

$$i_2 = \frac{6}{2} = 3\% \qquad i_4 = \frac{6}{4} = 1{,}5\%$$

2 semestres **4 trimestres**

Casos prácticos

Ejemplo Nº 2

Se colocan 50.000 euros al 2% trimestral durante 9 meses. Se pide obtener los intereses que se obtienen:

Se puede obtener mediante dos formas:

a) Utilizando como unidad de tiempo el trimestre (3)

$$I = C * i * t \qquad I = 50.000 * 0,02 * \frac{9}{3}$$

$$= 3.000 \text{ €}$$

b) Obteniendo el tipo anual equivalente y operando en años.

$$i = 4(trimestres / año) * 2(actual) = 8\% anual$$

$$I = C * i * t \qquad I = 50.000 * 0,08 * \frac{9}{12}$$

$$= 3.000 \text{ €}$$

Considerando la expresión matemática de la obtención del montante o cuanta final mediante capitalización simple $C_1 = C_0 (1+i)$, si queremos llegar hasta el último periodo "*n*", tendríamos que repetir el proceso una y otra vez:

$C_2 = C_1 (1+i)$, como a su vez, $C_1 = C_0 (1+i)$, resultaría, $C_2 = C_0 (1+i)(1+i)$, es decir; $C_2 = C_0 (1+i)^2$

Por tanto, y siguiendo la expresión de la CAPITALIZACIÓN COMPUESTA:

$$\boldsymbol{L_2 (t)= (1+i)^t}$$

Aplicando esta ley compuesta, una función exponencial, nos permite obtener el montante dentro de *n* años en una operación a mediano y largo plazo:

$$M = C * (1+i)^t \qquad I = C * [\ (1+i)^t - 1)]$$

La formula la podemos aplicar para capitalizar una cuantía de manera que si queremos saber su valor del año *p* tomando como base el año *k*, la formula sería: $C_{j \rightarrow k} = C_j (1+i)^{k-j}$

Por ejemplo, si tenemos 1.000€ del año 3, en el año 7 tendríamos:

$$1.000_{3 \rightarrow 7} = 1.000 * (1+i)^{7-3}$$

Lo que estamos haciendo es sólo comparar dos valores (el inicial y el final), obteniendo así su revalorización total.

En resumen, si por ejemplo en el 2º año, los intereses se calcularan sobre la cuantía generada en el 1º año (cuantía inicial), más los intereses generados en el primer periodo, por consiguiente tendríamos que los INTERESES SE ACUMULAN al capital. Ésta es la CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

Pero ¿Cuál es la diferencia entre la Capitalización Compuesta y la Simple? **1€.**

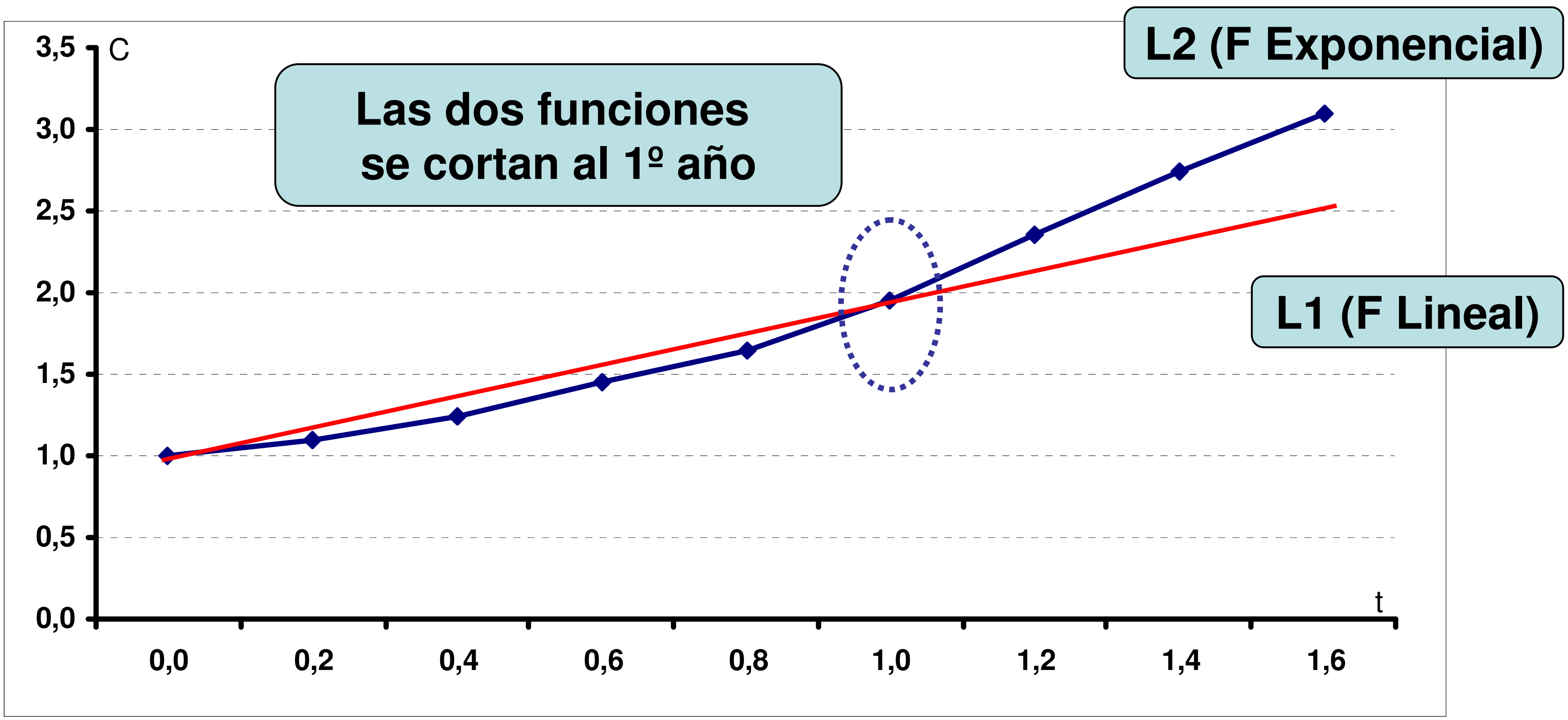
Por ejemplo, si tenemos 100 € en un depósito a plazo fijo en una cuenta ***openbank*** durante 1 año al 10% (*i*) con opción de renovación al segundo año (**capitalización compuesta**).

Al final de los 360 días cobraríamos 110 € (sin poder sacarlos) e inmediatamente se invertirían un año más, obteniendo así (110 * 1,1 ó 110 +11) **121 €**

Si lo hubiésemos calculado mediante la capitalización simple tendríamos sólo **120 €** {100*(1+0,20)}

Una vez más, la disponibilidad desempeña un papel significativo.

Gráficamente sería así…



Casos prácticos

Ejemplo Nº 3

Una empresa A le presta a su filial B, 90.000 € a 3 años a un tipo de interés efectivo anual del 3,7% ¿Cuál es el capital final (C_n) que recibe la empresa a tras la devolución del prestamo?

$$M = C * (1+i)^t$$
$$Cn = Co * (1+i)^t \longrightarrow Cn = 90.000 * (1+0{,}037)^3$$
$$= 90.000 * 1{,}115$$
$$= 100.364$$

Casos prácticos

Ejemplo Nº 4

Lehman Brothers tenia previstos unos beneficios de una inversión al cabo de 2 años y 6 años de 300.000 y 900.000 €. ¿Qué capital final ha de proporcionar otra inversión (C_n *o M*) para que sea mejor que ésta, si el tipo de interés efectivo anual para la valoración es del 3%?

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Tipo de interé**	3%						
2	**Años**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
3				300.000				900.000
4				337.653	0	0	0	900.000
5								
6				**D3*((1+B1)^(6-D2))**				
7								
8							**Cn**	**1.237.653**
9								
10								**SUMA(D4:H4)**

I.4. Descuento Simple Comercial y Racional. Descuento Compuesto

Las ***leyes de descuento o actualización*** permiten proyectar financieramente capitales hacia el pasado y son expresiones matemáticas cuyo valor es inferior a 1.

Las leyes de descuento simples se aplican en operaciones **a corto plazo** y pueden ser ***comercial*** o ***racional***.

LEY DE DESCUENTO COMERCIAL:

$$A_1\,(t) = 1 - d * t$$

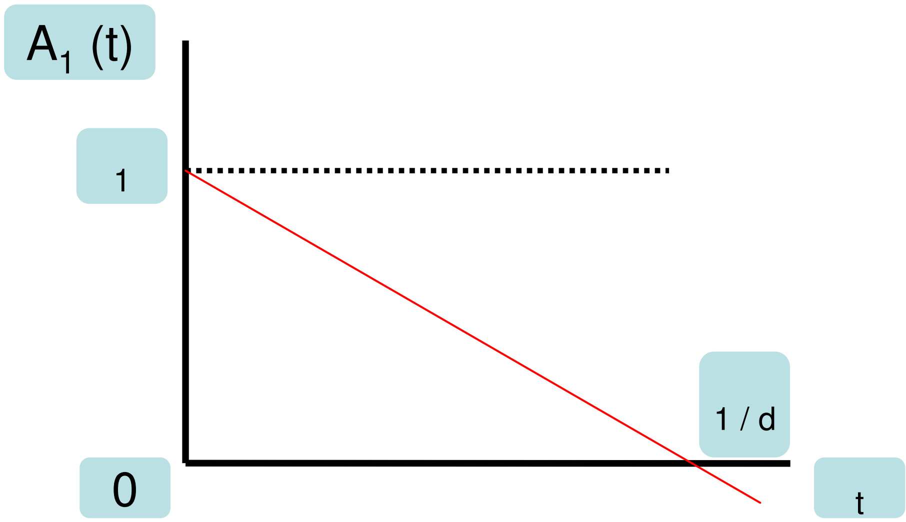
El término ***d*** es el tanto de descuento y mide la disminución por unidad de cuantía y unidad de tiempo.

Definiremos ***Valor Descontado*** de un capital al equivalente en el momento inicial, así:

$$V_0 = C^* (1\text{-}d * t)$$

Y denominaremos ***Descuento*** a la disminución que experimenta el capital de cuantía *C* al adelantar su disponibilidad en *t* períodos.

$$D = C^*d * t \qquad\qquad D = C - V_0$$



LEY DE DESCUENTO RACIONAL:

$$A_2\,(t) = \frac{1}{1+d * t}$$

El parámetro ***d*** es el tanto descuento racional. Si esta cuantía se capitalizará se obtiene la unidad de la que se había partido:

$$\frac{1}{1+d*t} * (1+d*t) = 1$$

lo que no ocurre cuando se utiliza el descuento comercial a tanto ***d***, dado que $(1 - d * t) * (1 + d * t) = 1 - d_2 * t_2 < 1$

LEY DE DESCUENTO COMPUESTO:

Permite descontar capitales futuros hacia el pasado en operaciones a largo plazo.

$$A_3\ (t) = (1+d)^{-t} \quad ó \quad A_3\ (t) = (1-d)^{t}$$

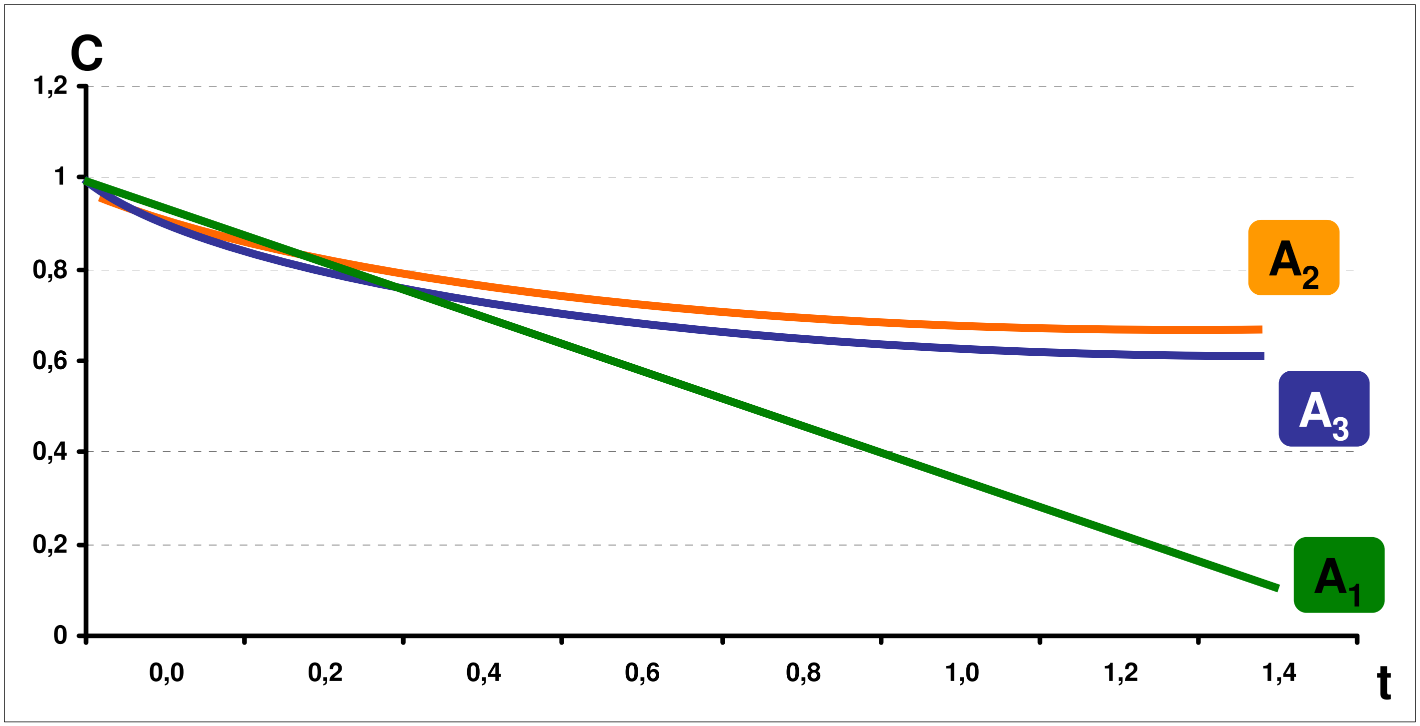
Valor Descontado

$$V_0 = C^*\ (1 + d)^{-t}$$

Descuento

$$D = C^*\{1 - (1+d)^{-t}\} \qquad D = C - V_0$$

Gráfico de las 3 Leyes de Descuento:



Casos prácticos

Ejemplo Nº 5

Una empresa tiene un pago pendiente de 30.000 € dentro de 2,5 años y desea cancelar la deuda hoy. ¿A cuánto equivale dicho pago en el momento actual, si el tipo de interés de valoración es el 3,5% efectivo anual?

$$Vo = C * (1+d)^{-t} \longrightarrow Vo = 30.000 * (1+0{,}035)^{-2{,}5}$$

$$= 30.000 * 0{,}918$$

$$= 27.528$$

1.5 Tipo de Interés Anual y Tipo de Interés Fraccionado

Recordando, el ***alquiler*** de un principal o cuantía inicial (Co) que se cobra a terceros se le conoce como ***tipo de interés.***

Podemos expresar el tipo de interés, por ejemplo el 3,5% de Open Bank, de distintas formas:

- En tanto por cien: 3,5%
- En puntos básicos: 350 PB (3,5% * 100)
- En puntos porcentuales: 3,5PP

Para valorar financieramente las operaciones, todas las variables (***Co, t, i***) deberán de estar en la MISMA UNIDAD DE TIEMPO (años con años, meses con meses, días con días, peras con peras,…)

Por ello, en la mayoría de operaciones a corto plazo es necesario valorar financieramente con un ***fraccionamiento*** "*m*" del año, de modo que el año se divide en "*m*" partes iguales.

m=12 en operaciones mensuales
m=360 en operaciones diarias

Así, para obtener la equivalencia del tipo de interés anual y el tipo de interés "fraccionado" en la capitalización simple:

$$i^{m} = \frac{i}{m}$$

Por tanto, el tipo de interés fraccionado es igual al tipo de interés efectivo anual dividido por el fraccionamiento del año.

Esto es así, únicamente en las operaciones a corto plazo en las cuales los intereses son proporcionales al capital *Co* y al plazo *t*.

$$i^m = \frac{i}{m} \longrightarrow$$

Tipo de interés diario = $i^{360} = i/360$

Tipo de interés mensual= $i^{12} = i/12$

Tipo de interés trimestral= $i^{4} = i/4$

Tipo de interés cuatrimestral= $i^{3} = i/3$

Tipo de interés semestral= $i^{2} = i/2$

Casos Prácticos
(Intereses fraccionados y ley de capitalización simple)

Ejemplo Nº 6
Una empresa solicita un préstamo simple de 9.000 €, que cancela con un pago único al cabo de un año y dos meses.

¿Cuál es el capital que cancela el préstamo, *Cn*, si el tipo de interés efectivo anual es i=4,5%?

¿Y si el tipo de interés mensual es $i^{(12)}$? 0.045/12= 0,375%

Cn= 9.000 * (1 + 0,045 * 14/12)
= 9.000 * (1+0,045*1,1666)
= 9.000 * (1+0,0525)
= 9.000 * (1,0525)
= 9.473

Casos Prácticos

(Intereses fraccionados y ley de descuento simple comercial)

En operaciones a corto plazo, en que se usan leyes simples, es común que la duración sea inferior al año y por tanto se descuente o actualice con un tipo de interés fraccionado como, por ejemplo, el tipo mensual, trimestral etc.

Ejemplo Nº 7
Se descuenta (comercial) una letra de nominal 10.000 € dentro de 3 meses. ¿Cuál es el efectivo ***Co=E*** recibido si el tipo de interés anual es 12%?

$$E = 10.000 * (1 - 0{,}12 * 3/12)$$

$$= 9.700 \text{ €}$$

Tipo de Interés Nominal Anual, Tipo de Interés Nominal Anual y Tipo de Interés Fraccionado

En la capitalización de operaciones a largo plazo (leyes compuestas) cuando la valoración se realiza en períodos inferiores al año, el tipo de interés puede ser:

- i : tipo de interés **efectivo *anual***
- i^m : tipo de interés para periodos inferiores al año.
  Ejemplos:
  Tipo de interés mensual: i^{12}
  Tipo de interés trimestral: i^4
- j^m : tipo de interés **nominal *anual para operaciones que se realizan en períodos*** de tiempo inferiores al año..

$$i^m = j^m / m \longrightarrow j^m = i^m \; m \longrightarrow \text{Leyes Compuestas}$$

Casos Prácticos

(Intereses fraccionados y ley de capitalización compuesta)

Ejemplo Nº 8
Se solicita un préstamo a 3 años de 90.000 € a un tipo anual del 4,5% y el pago de intereses es mensual.

- 4,5% es el tipo de interés nominal anual, para una operación mensual: j^{12}
- ¿Cuál es el tipo de interés efectivo anual (coste efectivo o real)?

Ecuación de equivalencia de *i* en leyes compuestas

$$(1+i) = (1+i^m) = \left(1+\left(\frac{j^m}{m}\right)\right)^m$$

Solución

- $i = (1 + (0,045 / 12))^{12} – 1 = 4,6\%$
- $i^{12} = j^{12} / 12 = 4,5\% / 12 = 0,37\%$

EJEMPLOS		
	m	
Interés Efectivo	2	4,55%
Tasa Nominal	2	4,50%
Int. Efectivo	4	4,58%
Int. Efectivo	6	4,5852%
Int. Efectivo	12	4,5940%

Importante y habitual:

En las operaciones a largo plazo valoradas con leyes compuestas, sea la ley de capitalización o la ley de descuento (actualización), cuando se calculan los intereses en períodos inferiores al año, hemos de considerar que podemos disponer de un dato de tipo de interés anual efectivo "i" o tipo de interés anual nominal "j^{m}" o tipo de interés fraccionado "i^{m}".

No obstante, a partir de la ecuación de equivalencia de tipos de interés podemos calcular cualquiera de estos tipos a partir de otro de ellos.

Casos Prácticos

(Intereses fraccionados y leyes compuestas)

Ejemplo Nº 9

Una empresa ha de realizar unos pagos dentro de 6 meses, 1,5 años, 5,5 años y 6 años, que ascienden a 12.000, 15.000, 6.000 y 42.000 € respectivamente.

¿Cuál es el pago o capital único (equivalente) pasados 3 años, para cancelar dichas deudas, si el tipo de interés **nominal anual para la operación semestral es 3,7646%?**

$j^{2} = 3{,}7646$ $\quad$ i=3,8%

$$C_3 = 12.000\,(1+i)^{2,5} + 15.000\,(1+i)^{1,5} + 6.000\,(1+i)^{-2,5} + 42.000\,(1+i)^{-3}$$

$$C_3 = 72.055{,}6$$

1.6 Suma y Desdoblamiento de Capitales

Comparación de capitales
- Equivalencia
- Ordenación

Suma de capitales
- Vencimiento común
- Vencimiento medio

Desdoblamiento de capitales
- Prórroga de vencimiento

Equivalencia de Capitales

Cuando dos o más capitales tienen el mismo valor en la fecha que se efectúa la comparación.

- Cuando la ley financiera es ***el descuento comercial o racional***, la fecha (***p***) en la que se efectúa la comparación es el momento presente (***p=0***) y por tanto, ***coinciden*** los valores.

- Si utilizamos la ley de la ***capitalización simple***, la comparación se efectúa en la fecha de acumulación de intereses, fecha que suele ***coincidir con el final del año o semestre.***

- Si la ley es la ***capitalización o el descuento compuesto*** la equivalencia puede establecerse en cualquier momento de tiempo ya que ***la equivalencia NO depende del momento de valoración.***

Casos Prácticos

Ejemplo Nº 10

Se tiene que pagar una letra del tesoro de 7.500 € dentro de 60 días y se acuerda sustituirla hoy por otra de cuantía equivalente con vencimiento dentro de 120 días aplicando el descuento comercial al 12% anual.

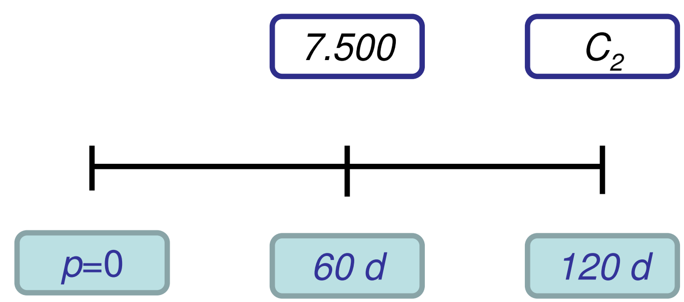
¿Cuál sería la esta cuantía si se utiliza el año comercial?

$$C_0^{(1)} = 7.500 * \left(1 - 0{,}12 * \frac{60}{360}\right) = 7.350\ €$$

$$C_0^{(2)} = C_2 * \left(1 - 0{,}12 * \frac{120}{360}\right)$$

$$C_0^{(1)} = C_0^{(2)} \quad \gg \quad 7.350 = 0{,}96 * C_2 \quad \gg$$

$$C_2 = 7.656{,}25\ €$$



Ordenación de Capitales

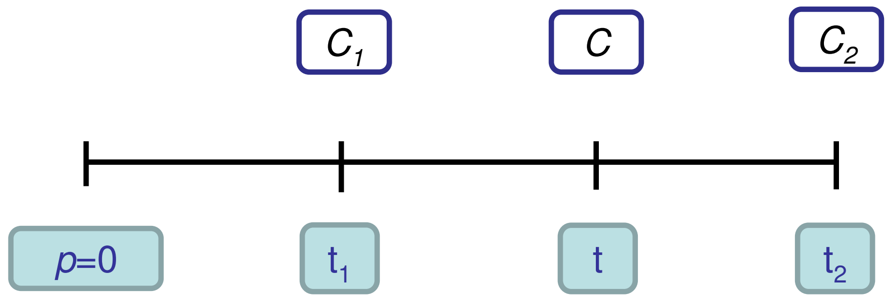
Dados dos capitales y una ley financiera, se preferirá el que tenga mayor valor en la fecha en la que se efectúa la comparación. Si son más de 2 capitales se establecerá el ***orden de preferencia*** entre ellos comparando sus valores en la fecha citada.

Si la ley es la capitalización simple se hayan los montantes o cuantías finales en p, M_1 y M_2 y luego se decide:

$$M_1 > M_2 \gg (C_1;t_1) \succ (C_2;t_2)$$

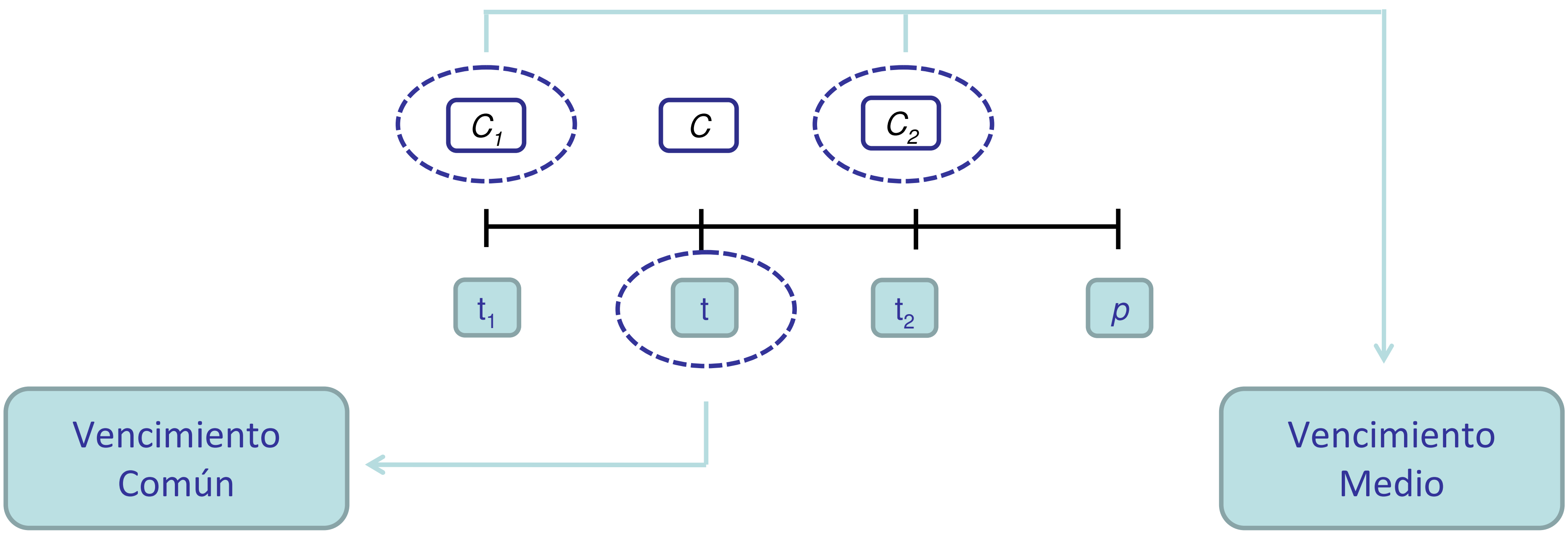
Suma de Capitales

Dados dos capitales sumandos ($C_1;t_1$) y ($C_2;t_2$) y una ley financiera de valoración en *p*, el capital es la suma financiera de ambos si se verifica para el descuento comercial *p=0*, la siguiente igualdad de los valores descontados:



$$C_1 * (1-d*t_1)+C_2(1-d*t_2)= \mathbf{C(1-d*t\ )}$$

Cuando, con los mismos capitales sumandos, la ley de capitalización simple, el esquema gráfico y la ecuación de equivalencia son:



$$C_1 * (1+i*(p-t_1)) \quad + \quad C_2 * (1+i*(p-t_2)) \quad = \quad \mathbf{C * (1+i*(p-t))}$$

Casos Prácticos

Ejemplo Nº 11

Se han de pagar dos letras, la primera de 10.000 € dentro de 45 días y la segunda de 20.000 € dentro de 90 días y se decide hoy sustituirlas por una que venza dentro de 60 días. Si se utiliza el descuento comercial a un tanto del 15% anual.

¿Cuál sería la cuantía de la nueva letra?

$$10.000 * \left(1 - 0,15 * \frac{45}{360}\right) + 20.000 * \left(1 - 0,15 * \frac{90}{360}\right) = ?? * \left(1 - 0,15 * \frac{60}{360}\right)$$

$$= 29.808€$$

Desdoblamiento de Capitales

El desdoblamiento de capitales es la operación compuesta a la suma ya que ahora el dato es el ***capital*** suma y se trata de ***descomponerlo*** en varios capitales sustitutos.

Se utiliza cuando el deudor efectúa un pago en cierto momento ***t*** y desea sustituirlos por varios pagos de menor cuantía en distintos momentos $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ que en conjunto sean equivalentes al primero.

Un caso particular del desdoblamiento de capitales es la ***prórroga de vencimiento***:

$$C_2 = C - C_1$$

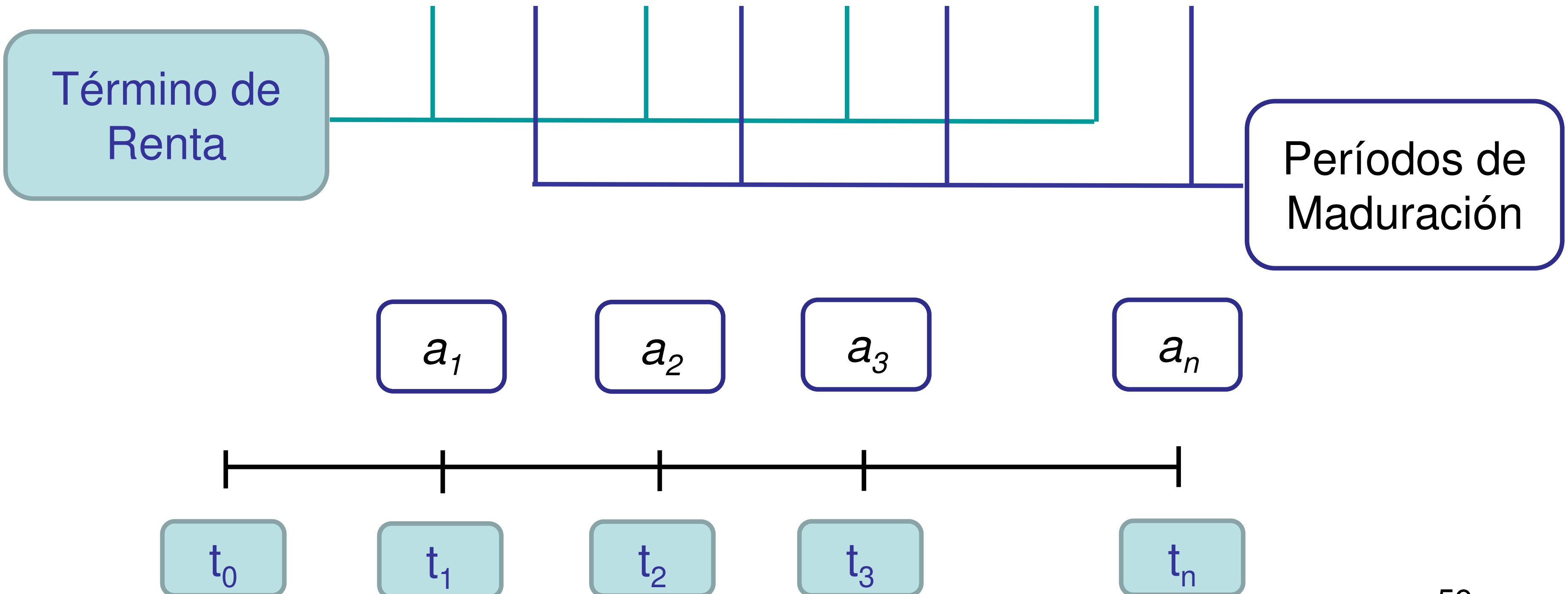
$$t = \frac{C_1 * t_1 + C_2 * t_2}{C} \Rightarrow t_2 = \frac{C * t - C_1 * t_1}{C_2}$$

Tema II. RENTAS FINANCIERAS

CONCEPTO DE RENTA

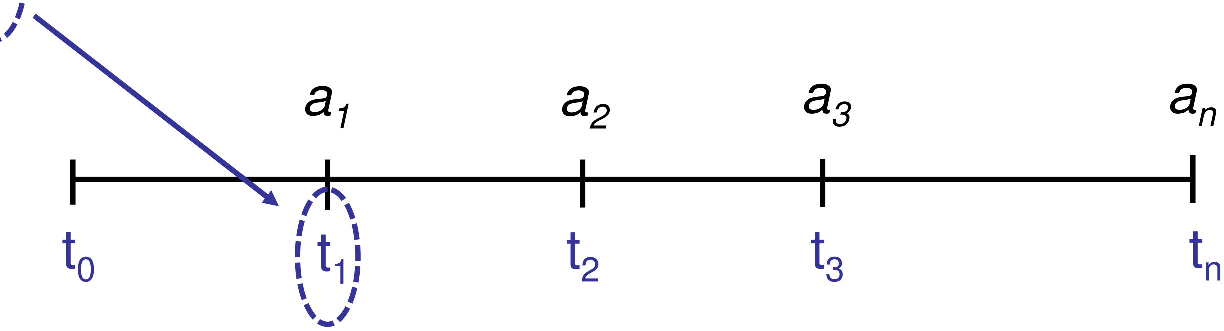
Sucesión o conjunto de capitales financieros en determinados períodos de tiempo con vencimientos regulares.

$$a = (a_1 * t_1)(a_2 * t_2)(a_3 * t_3)\cdots(a_n * t_n)$$

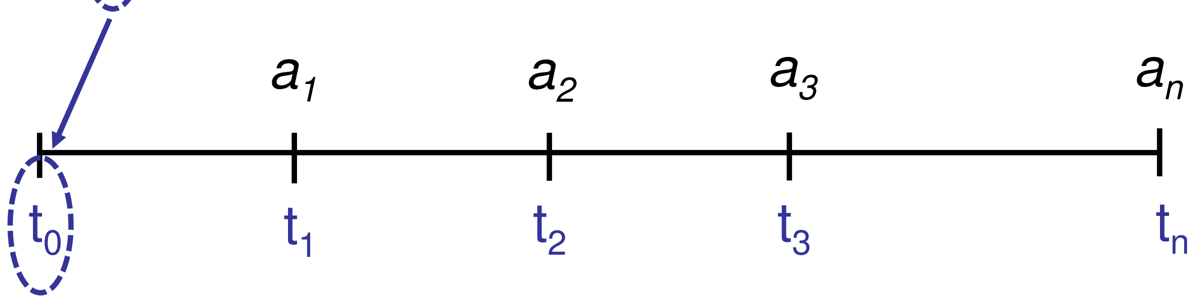


Una renta, según su ORIGEN puede ser ***prepagable*** o ***pospagable***.

Si se sitúa en t_1 nos referiremos a una renta prepagable.



Si el origen está en t_0 hablaremos de una renta pospagable.



CLASIFICACIÓN DE RENTAS

Las Rentas se pueden agrupar en distintos subconjuntos que tienen una o más características en común. ***De entre todas las clasificaciones destacan las siguientes***:

- 1º Por la cuantía de los capitales
  - **Rentas Constantes**
  - **Rentas Variables**
- 2º Por la duración
  - **Rentas Temporales**
  - **Rentas Perpetuas**

3º Por la amplitud de períodos de maduración

- **Rentas Discretas**
  - Periódicas
  - No Periódicas
- **Rentas Continúas**

4º Por el momento de vencimiento

- **Rentas Pospagables**
- **Rentas Prepagables**

5º Por el momento de valoración

- **Rentas Inmediatas**
- **Rentas Diferidas**

En una operación financiera en la que intervienen dos partes (A y B), se plantea la equivalencia financiera de los capitales que entregan ambas partes. Dicha equivalencia se plantea para un tipo de interés de valoración, el tipo de interés efectivo anual ***"i"***, y aplicando leyes compuestas.

Recibe A = Entrega A

$$C_0 = \sum a_s (1+i)^{-s}$$

Entrega A = Recibe A

Ejemplos de rentas: alquileres mensuales, préstamos, leasing, cupones o intereses de bonos y obligaciones, dividendos constantes, beneficios mensuales.

Valoración de rentas: la valoración de rentas se realiza en un momento del tiempo, normalmente con leyes compuestas:

- En el origen de la operación (t=0) =>
  Se obtiene el ***Valor Actual (VA)*** de la renta.
  - El valor actual de una renta es el capital equivalente en el momento actual (t=0), a "todos" los capitales de la renta.
  - El valor actual es el equivalente a "todas" las anualidades, mensualidades etc. de la renta.
  - Los valores actuales para rentas se obtienen en hojas de cálculo con la función financiera VA o VNA, para rentas constantes y variables respectivamente.
- En el final de la operación (n) =>
  Se obtiene el ***Valor Final (VF)*** de la renta.

Las variables que afectan al valor (actual o final) de una renta (en excel las funciones financieras son ***VA, VNA y VN***) son tres:

- ***La duración de la renta (t)***.
- ***El capital de la renta.*** Ej. en rentas unitarias: 1 u. m.
- El tipo de interés al que se calcula el valor (actual o final) de la renta: ***tipo de interés efectivo anual (i)***.

Metodología de análisis de las ***Rentas Constantes y Variables***:

RENTAS CONSTANTES

- **Anuales**
  - Valor Actual (VA)
  - Valor Final (VF)
  - Rentas Prepagables y Pospagables
  - Rentas Perpetuas
- **Fraccionadas**

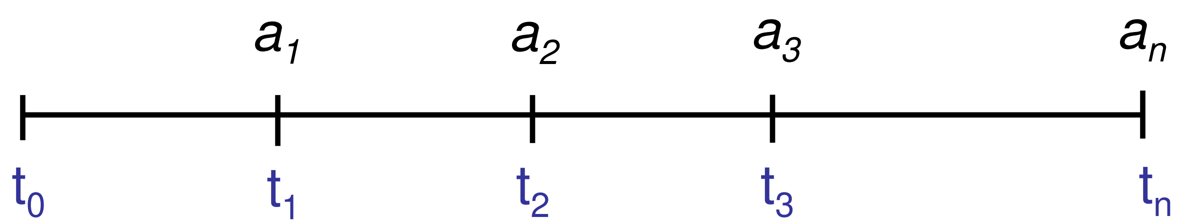
RENTAS VARIABLES

- **Anuales**
  - En progresión geométrica
  - En progresión aritmética
- **Fraccionadas**

RENTAS CONSTANTES

Anuales

Valor actual de una renta: VA es el valor actual de una renta (Ej. una renta unitaria de duración n años y tipo de interés efectivo anual i).



$$VA = 1(1+i)^{-1} + 1(1+i)^{-2} + \ldots + 1(1+i)^{-n}$$

$$VA = 1\sum_{s=1}^{n}(1+i)^{-s}$$

Valor actual renta:

$$VA = a_{n \neg i} = \frac{(1-(1+i)^{-n})}{i}$$

Valor actual renta de capital:

$$C : C * a_{n \neg i}$$

El valor actual de una renta constante se representa mediante el símbolo $a_{n \neg i}$ ***(a historiada)*** y se obtiene sumando las cuantías equivalentes en el momento ***0*** (origen) a cada una de las unidades monetarias que componen la renta

$$a_{n \neg i} = \frac{(1-(1+i)^{-n})}{i}$$

Para calcular el Valor Actual (VA = V_0)

$$V_0 = V_n * a_{n \neg i}$$

$$VA = VF * a_{n \neg i}$$

Casos Prácticos

Ejemplo Nº 12

Una persona percibe una renta de 10.000 € ***anuales y pospagables*** durante 10 años. Se desea conocer el ***Valor Actual*** de esta renta sabiendo que se valora en capitalización compuesta al 9% anual.

$$a_{n \neg i} = \frac{(1-(1+i)^{-n})}{i} \qquad a_{10 \neg 9\%} = \frac{(1-(1+0{,}09)^{-10})}{0{,}09}$$

$$= 6{,}4177$$

$$V_0 = V_n * a_{n \neg i} \qquad V_0 = 10.000 * a_{10 \neg 9\%}$$

$$VA = VF * a_{n \neg i} \qquad = 10.000 * 6{,}4177$$

$$= 64.176{,}58 \text{ €}$$

Casos Prácticos

Ejemplo Nº 13

Una empresa tienen previsto el cobro de una renta constante de 6.000 € al año durante 5 años, ¿cuál sería el capital único equivalente a dicha renta, en el momento actual, si el tipo de interés efectivo anual es 3%?

$$a_{n\neg i} = \frac{(1-(1+i)^{-n})}{i}$$

$$a_{5\neg 3\%} = \frac{(1-(1+0{,}03)^{-5})}{0{,}03}$$

$$= 4{,}5797$$

$$V_0 = V_n * a_{n\neg i}$$

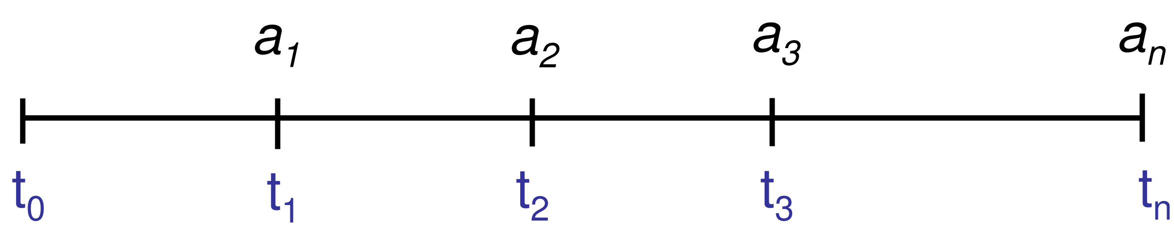
$$VA = VF * a_{n\neg i}$$

$$V_0 = 6.000 * a_{5\neg 3\%}$$

$$= 6.000 * 4{,}5797$$

$$= 27.478{,}24 \text{ €}$$

Valor final de una renta: Valor final de una renta: VF es el valor final de una renta (Ej. una renta unitaria de duración n años y tipo de interés efectivo anual i).



$$VA = 1(1+i)^1 + 1(1+i)^2 + \ldots + 1(1+i)^n$$

$$VA = 1\sum_{s=0}^{n}(1+i)^s$$

Valor final de una renta: $VF = s_{n\neg i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Valor final renta de capital: $C : C * s_{n\neg i}$

El ***valor final*** se representa mediante el símbolo $s_{n\neg i}$ ***(s historiada)*** y se obtiene sumando las cuantías equivalentes en el momento ***n*** a cada una de las unidades monetarias que componen la renta

$$s_{n\neg i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Para calcular el Valor Final (VF = V_n)

$$V_n = V_0 * s_{n\neg i}$$

$$VF = VA * s_{n\neg i}$$

Casos Prácticos

Ejemplo Nº 14
Si se ingresa en una cuenta o depósito un capital de 6.000 € anualmente y, la rentabilidad de la cuenta es un 5%. ¿De que capital se dispone pasados 3 años?

$$s_{n\neg i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$s_{3\neg 5\%} = \frac{(1+0{,}05)^3 - 1}{0{,}05}$$

$$= 3{,}1525$$

$$V_n = V_0 * s_{n\neg i}$$

$$VF = VA * s_{n\neg i}$$

$$V_n = 6.000 * 3{,}1525$$

$$= 18.915$$

Casos Prácticos

Ejemplo Nº 15

Una empresa constituye un fondo de previsión, a favor de sus trabajadores, para complementar sus pensiones de jubilación. El fondo lo acumula mediante aportaciones anuales de 6.010 € durante 8 años y la rentabilidad efectiva del fondo es un 4%.

$$s_{n\neg i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$s_{8\neg 4\%} = \frac{(1+0{,}04)^8 - 1}{0{,}04}$$

$$= 9{,}2142$$

$$V_n = V_0 * s_{n\neg i}$$

$$VF = VA * s_{n\neg i}$$

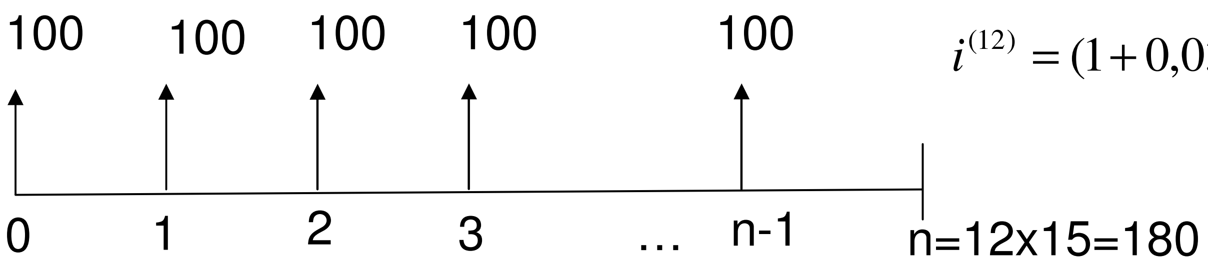
$$V_n = 6.010 * 9{,}2142$$

$$= 55.377{,}50$$

Casos Prácticos

Ejemplo Nº 16

Un individuo decide realizar un depósito de 100€ el primer día de cada mes durante quince años. Si el tipo de interés efectivo al que la entidad remunera el depósito es del 3%. Determine el dinero disponible transcurrido los 15 años.



$$i^{(12)} = (1+0{,}03)^{1/12} - 1 = 0{,}0024662$$

$$V_n = s_{180\rceil i^{(12)}} = 100 * \left(1+i^{(12)}\right) * s_{180\rceil i^{(12)}} = 100 * \left(1+i^{(12)}\right)^{180+1} * a_{180\rceil i^{(12)}} =$$

$$= 100 * \left(1+i^{(12)}\right)^{180+1} \frac{1-\left(1+i^{(12)}\right)^{-180}}{i^{(12)}} = 100 * (1+0{,}00246)^{180+1} \frac{1-(1+0{,}00246)^{-180}}{0{,}00246}$$

$$V_n = 22.679€$$

Es fundamental tener claro (es quizá lo más importante), que los intereses generados, resultado de una inversión durante un período de tiempo se les conoce como ***COSTE DE OPORTUNIDAD***. Y éste, en Rentas Financieras, está representado por $a_{n\neg i}$ y $s_{n\neg i}$.

Por tanto, la ***a historiada*** recoge todos los ***costes de oportunidad*** generados de una inversión realizada, de la cual se conoce el ***valor final*** de la renta financiera total equivalente. ***Sin duda,*** $a_{n\neg i}$ ***sintetiza el cálculo de los costes de oportunidad en cada período de maduración.***

$$VA = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = a_{n\neg i}$$

Por su parte, la ***s historiada*** recoge todos los ***costes de oportunidad*** que se generarán al realizar una renta financiera. ***Al igual que la a historiada,*** $s_{n\neg i}$ ***recoge todos los costes de oportunidad en cada período de maduración.***

$$VF = 1*(1+i)^{n-1} + 1*(1+i)^{n-2} + 1*(1+i)^{n-3} + \cdots + 1 =$$

$$= (1+i)^{n} a_{n\neg i} = s_{n\neg k}$$

El ***valor actual y el valor final*** de la renta son capitales equivalentes puesto que miden lo mismo (el valor de la renta) en dos momentos diferentes de tiempo ***(t_0 y t_n).*** Por ello, si conocemos una de las cuantías podemos calcular la otra.

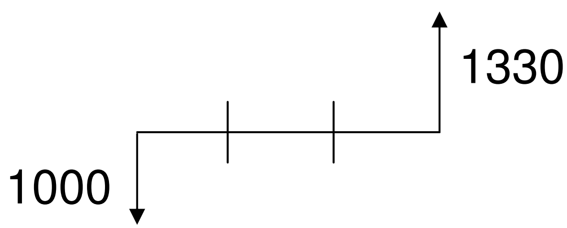
Así, para pasar de ***0---n*** en capitalización compuesta tenemos que multiplicar por $(1+i)^n$; y para pasar de ***n---0*** hay que multiplicar por $(1+i)^{-n}$.

$$(a_{n\neg i};n) \approx (s_{n\neg i};n) \Rightarrow \begin{cases} s_{n\neg i} = (1+i)^n * a_{n\neg i} \\ a_{n\neg i} = (1+i)^{-n} * s_{n\neg i} \end{cases}$$

Casos Prácticos

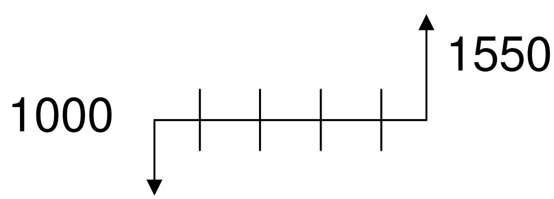
Ejemplo Nº 17
Una empresa propone las siguientes modalidades de devolución de un depósito de 1.000€.

A) Un único pago transcurrido tres años de 1.330€



$$1.000 = \frac{1.330}{(1+i)^3} \Rightarrow i = 9{,}972\%$$

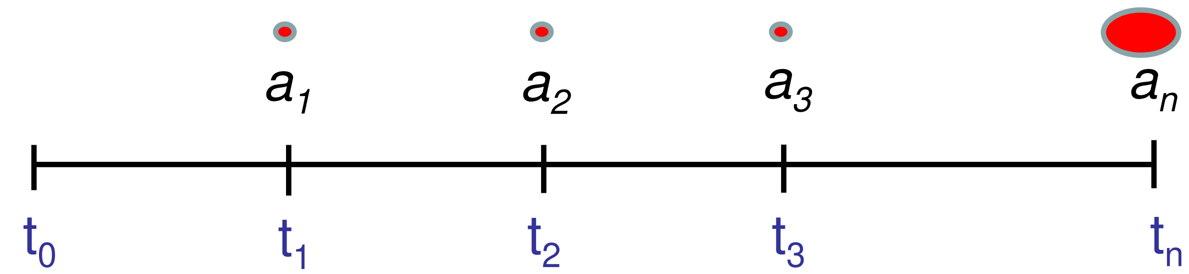
B) Un único pago transcurrido cinco años de 1.550€



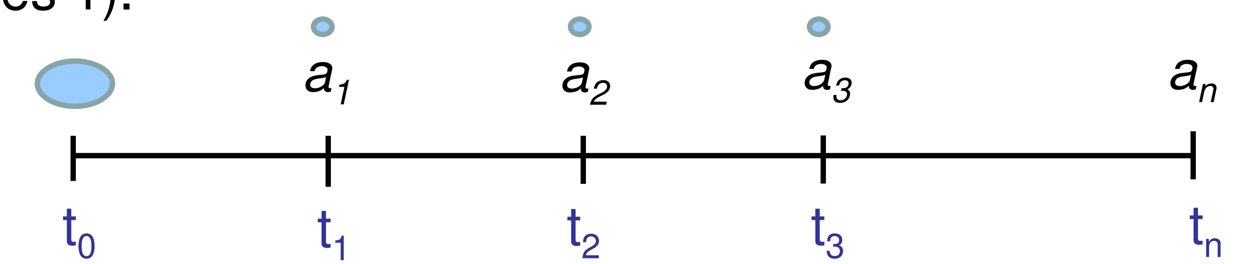
$$1.000 = \frac{1.550}{(1+i)^5} \Rightarrow i = 9{,}16\%$$

Rentas prepagables y pospagables

Renta pospagable: Cuando el primer capital de la renta se cobra/paga al final del primer ejercicio (en t=1). (El argumento "tipo" es 0).



Renta prepagable: Cuando el primer capital de la renta se cobra/paga al principio del primer ejercicio (en t=0). (El argumento "tipo" es 1).



Casos Prácticos

Ejemplo Nº 18
Si existe un compromiso de pagar unos capitales de 6.000 €, a principio de cada uno de los próximos 10 años. ¿Cuál es el capital único a pagar para liquidar la deuda si el tipo efectivo anual es el 3,7%? Es decir, ¿Cuál es el valor actual equivalente a la renta prepagable?

$$a_{n\neg i} = \frac{(1-(1+i)^{-n})}{i}$$

$$a_{10\neg 3,7\%} = \frac{(1-(1+0,037)^{-10})}{0,037} = 8,2333$$

$$V_0 = V_n * a_{n\neg i}$$

$$VA = VF * a_{n\neg i}$$

$$V_0 = 6.000 * a_{10\neg 3,7\%} = 6.000 * 8,2333 = 49.400,37 \text{ €}$$

Rentas perpetuas

Renta perpetua y pospagable: La duración de la renta es perpetua, $n \rightarrow \infty$. Por tanto, en rentas perpetuas no se obtienen valores finales ¿Por qué?

El símbolo del valor actual de este tipo de rentas es $a_{\infty\neg i}$ y se obtiene de:

$$a_{\infty\neg i} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots = \frac{(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{1}{i}$$

El resultado final $\frac{1}{i}$ es el capital que habría que colocar en el momento inicial para poder cobrar una unidad monetaria al final de cada período con carácter indefinido **(perpetuo).**

Es importante destacar que en las rentas perpetuas NO tiene sentido hablar del **valor final *(VF)*** ya que la duración (n) es ***infinita***.

Cuando la renta perpetua es de cuantía constante y pospagable, la formula para encontrar el **valor actual *(VA)*** es:,

$$VA = VF_{pm} * a_{\infty\neg i} = \frac{VF_{pm}}{i}$$

Renta perpetua y prepagable: Este tipo de rentas, tienen como principal característica el pago ***infinito*** de las cuantías que integran el capital único equivalente.

El ***valor actual (VA)*** se anota simbólicamente así:

$$\ddot{a}_{\infty\neg i} = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots = \frac{1}{1-(1+i)^{-1}}$$

$$\ddot{a}_{\infty\neg i} = \frac{1+i}{i}$$

Si la renta es constante, VA es:

$$\ddot{VA} = VF_{pm} * \ddot{a}_{\infty\neg i}$$

RENTAS CONSTANTES

Fraccionadas

Una renta constante anual se puede ***fraccionar m períodos iguales***. En rentas fraccionadas, ***cada cuantía y cada período de maduración se divide en m partes iguales*** y se establece la aplicación biyectiva entre cada cuantía y cada subperíodo de maduración.

Para estimar el ***valor actual (VA)*** de una renta constante en períodos inferiores al año (meses, trimestres...), es necesario que todas las variables estén en la misma unidad de tiempo:

Por ejemplo, si la renta es trimestral:

El capital será trimestral (A_3)

El tiempo son trimestres ***(n=4)***

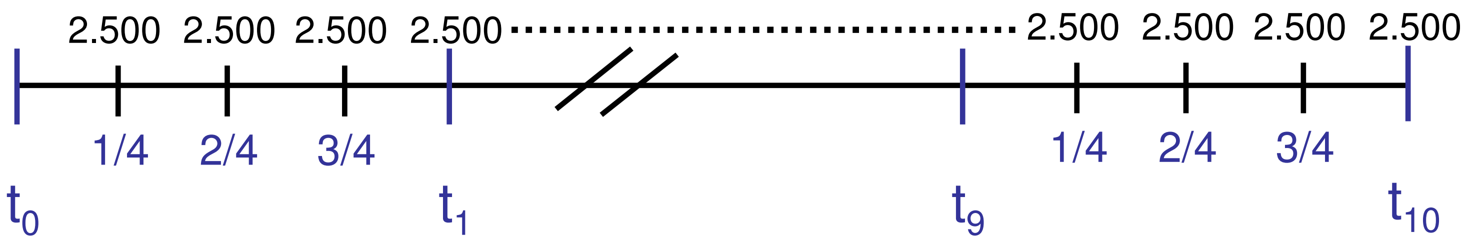
El tipo de interés será trimestral (i^4)

Casos Prácticos

Ejemplo Nº 19
Una persona desea obtener los ***valores actual (VA) y final (VF)*** de una renta fraccionada valorada a un tipo de interés efectivo anual del 12% en el siguiente supuesto:

º) Cuantías **trimestrales** constantes y pospagables de 2.500 euros durante 10 años.

Solución del supuesto:



El valor actual es:

$$VA = VF * a_{n \neg i}$$

$$VA = VF * (1-(1+i_4)^{-n})/i_4$$

$$VA = 2.500 * ((1-(1+0{,}02874)^{-40})/0{,}02874)$$

$$VA = 2.500 * (25{,}5939)$$

$$VA = 58.984{,}8$$

$$j_4 = (1+i)^t - 1$$

Y el valor final es:

$$VF = VA * s_{n\neg i}$$

$$VF = VA * ((1 + i_4)^n - 1) / i_4$$

$$VF = 2.500 * ((1 + 0,02874)^{40} - 1) / 0,02874)$$

$$VF = 2.500 * (2,1058 / 0,02874)$$

$$VF = 2.500 * (73,2792)$$

$$VF = 183.197,9$$

$$j_4 = (1 + i)^t - 1$$

Metodología de análisis de las ***Rentas Constantes y Variables***:

RENTAS CONSTANTES

- **Anuales**
  - Valor Actual (VA)
  - Valor Final (VF)
  - Rentas Prepagables y Pospagables
  - Rentas Perpetuas
- **Fraccionadas**

RENTAS VARIABLES

- **Anuales**
  - En progresión geométrica
  - En progresión aritmética
- **Fraccionadas**

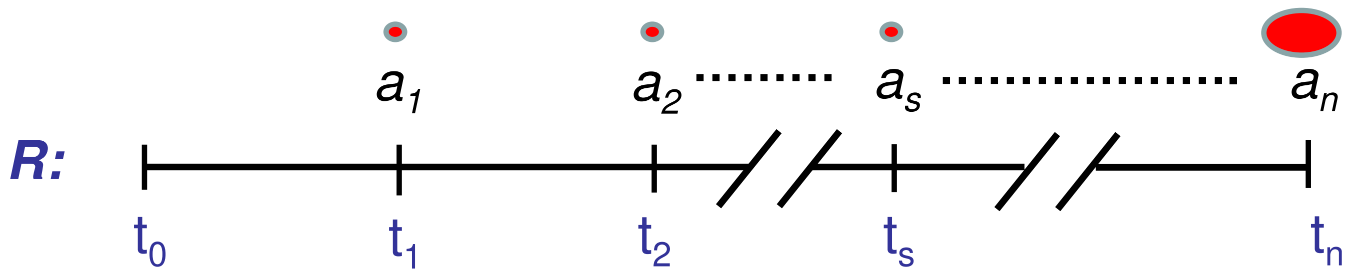
RENTAS VARIABLES GENERALES

En este tipo de rentas los ***términos*** son diferentes entre sí y su variación no sigue ninguna ley conocida.

Existen ***4 tipos de rentas variables generales***:

- Renta Pospagable
- Renta Prepagable
- Renta Diferida
- Renta Anticipada

Renta Pospagable



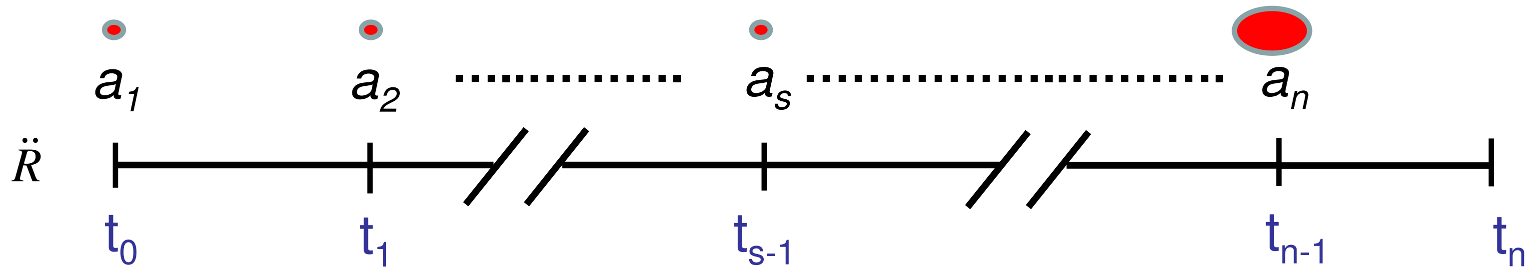
Su Valor Actual se calcula así:

$$VA = a_1 * (1+i)^{-1} + a_2 * (1+i)^{-2} + \ldots + a_n * (1+i)^{-n} = \sum_{s=1}^{n} a_s * (1+i)^{-s}$$

Y su Valor Final:

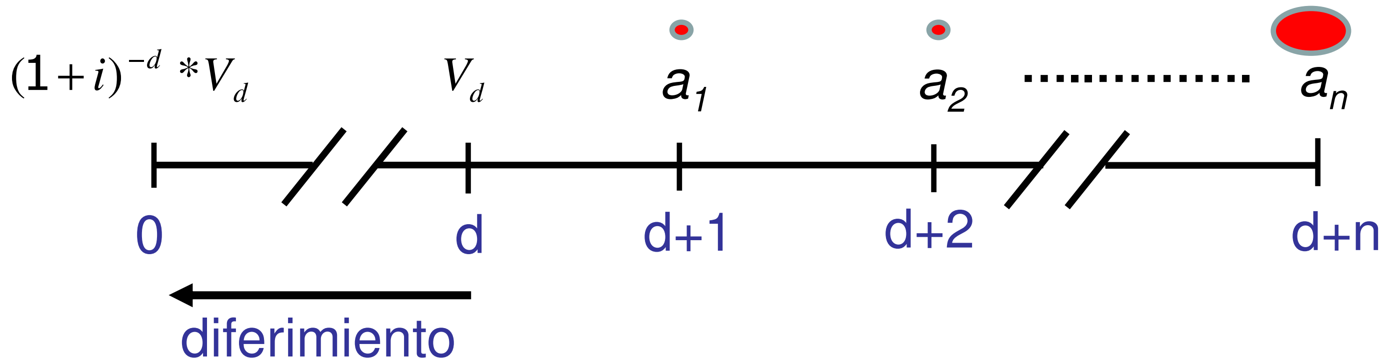
$$VF = a_1 * (1+i)^{n-1} + a_2 * (1+i)^{n-2} + \ldots + a_n = \sum_{s=1}^{n} a_s * (1+i)^{n-s}$$

Renta Prepagable



IMPORTANTE: En las rentas variables, al igual que en las constantes, el operador matemático ***<<1+i >>*** permite obtener el valor de una renta prepagable a partir del correspondiente valor de la pospagable.

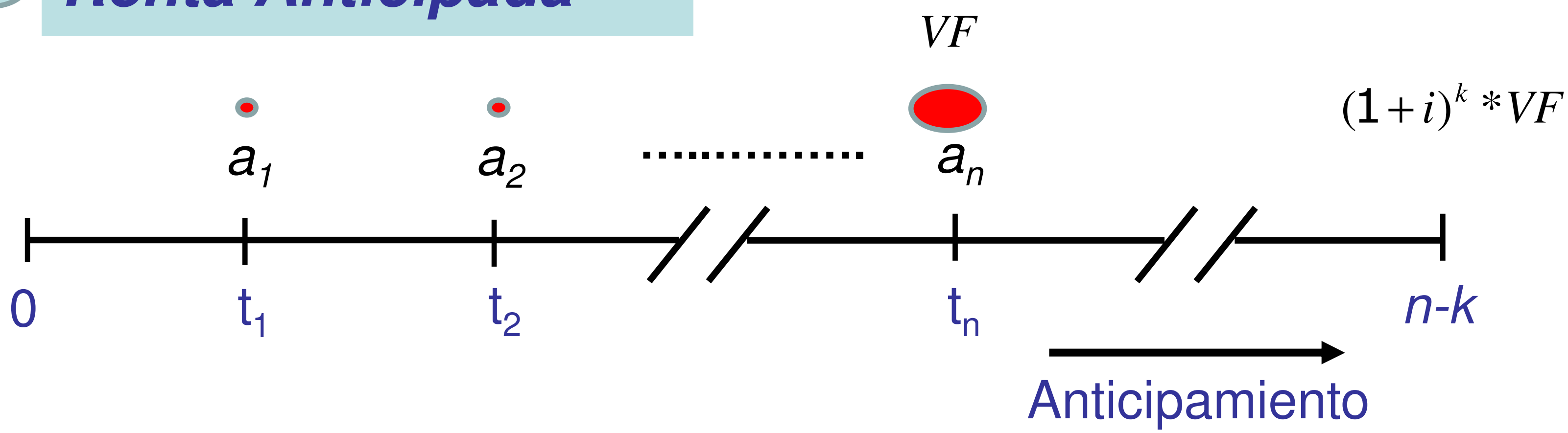
Renta Diferida



Al valorar la renta en ***d*** se obtiene el valor ***V_d*** correspondiente a una renta inmediata; para trasladar este valor a 0 hay que multiplicar por el ***factor de actualización $(1+d)^{-d}$***. Por tanto:

$$ {}_d/VA = (1+i)^{-d} * V_d $$

Renta Anticipada



El valorar de la renta en n es VA (valor final de la renta inmediata) y hay que multiplicarlo por ***(1+i)*** ***k*** para trasladarlo a ***n+k***. En consecuencia:

$$ {}_k/VF = (1+i)^k * V_F $$

RENTAS EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

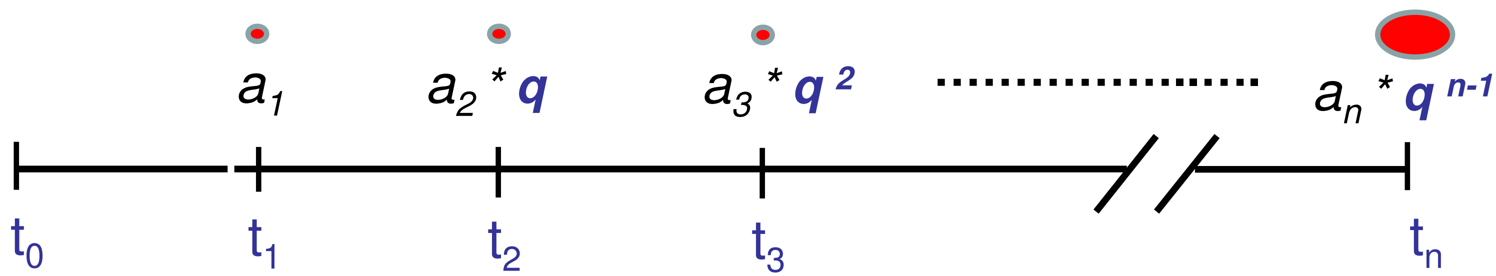
En estas rentas cada término se obtiene a partir del anterior ***multiplicándolo*** por un número ***q*** que le denominaremos ***RAZÓN GEOMÉTRICA***. La razón ha de ser ***positiva q > 0***.

Cuando ***q > 1*** los términos ***crecen*** y cuando ***q < 1*** los términos ***decrecen***.

Al igual que las rentas constantes, las rentas variables en progresión geométrica pueden ser:

- Cuando la renta es ***temporal*** y ***pospagable***.
- Cuando la renta es ***perpetua*** y ***pospagable***.
- Cuando la renta es ***temporal*** y ***prepagable***.
- Cuando la renta es ***perpetua*** y ***prepagable***

Por ejemplo, una renta temporal y pospagable en progresión geométrica se calcularía así:



Para obtener VA, cuyo símbolo estará representado por $\boxed{A(a;q)_{n\neg i}}$ se valorarán en el origen estos capitales y después se sumarán:

$$A(a;q)_{n\neg i} = C*(1+i)^{-1} + C*q*(1+i)^{-2} + \ldots + C*q^{n-1}*(1+i)^{-n} =$$

$$= C*(1+i)^{-1}*\left[\ 1+q*(1+i)^{-1}+\ldots+q^{n-1}*(1+i)^{-(n-1)}\ \right]=$$

Dentro del corchete se tiene la suma de términos de renta en progresión geométrica de razón ***$q*(1+i)^{-1}=q/(1+i)$***

$$= C*(1+i)^{-1}*\frac{1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^n}{(1+i)^{-1}*(1+i-q)}$$

$$A(C;q)_{n\neg i} = C*\frac{1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^n}{1+i-q}$$

Y el cálculo del Valor Final (VF) sería:

$$S(C;q)_{n\neg i} = (1+i)^n * A(C;q)_{n\neg i} = C*\frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q}$$

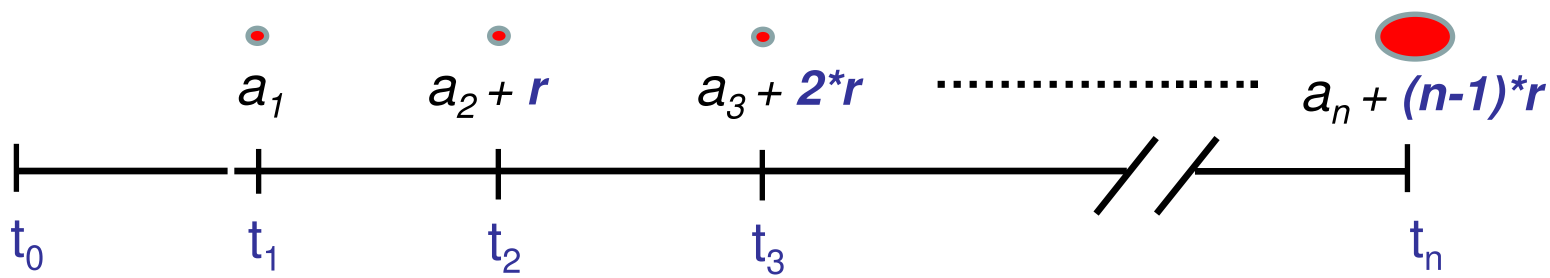
RENTAS EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

En estas rentas cada término de renta se obtiene en función del anterior ***sumándole*** una cuantía constante ***r*** que le llamaremos ***RAZÓN ARITMÉTICA***.

Esta razón puede ser positiva o negativa; si es negativa estará condicionada a que el último término de renta será positivo.

Al igual que en la progresión geométrica, existen cuatro tipo de rentas según su temporabilidad y capacidad de liquidación.

Por ejemplo, una renta temporal y pospagable en progresión aritmética se calcularía así:



$$\boxed{A(a;r)_{n\neg i}}$$

Para obtener VA:

$$A(C;r)_{n\neg i} = \left(C + \frac{r}{i}\right) * a_{n\neg i} - \frac{r * n * (1+i)^{-n}}{i}$$

Para obtener VF:

$$S(C;r)_{n\neg i} = (1+i)^n * A(C;r)_{n\neg i} = \left(C + \frac{r}{i}\right) * s_{n\neg i} - \frac{r*n}{i}$$

VALORACIÓN DE INVERSIONES

Tal y como se ha mencionado en la diapositiva 13 de este material, las decisiones financieras comprenden dos tipos: ***las de inversión y las de financiación.***

Desde la perspectiva de la valoración financiera, ambas operaciones son duales la una de la otra , por lo que las definiremos así:

- ***Operación de Inversión:***
  Cuando en primer lugar se desembolsa el capital y luego se va recuperando a lo largo del tiempo.

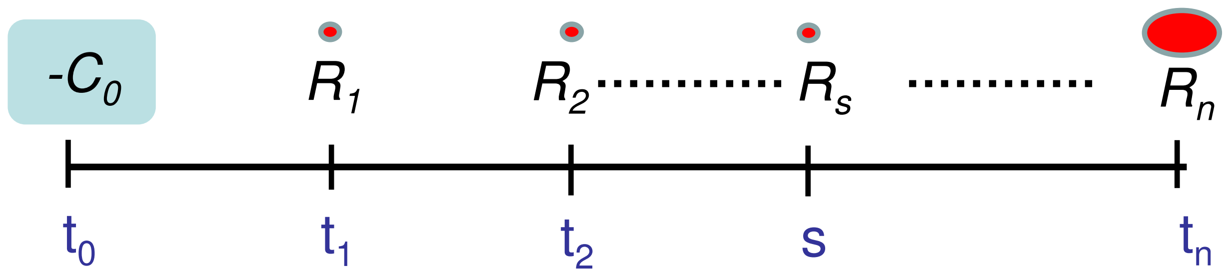
- ***Operación de Financiación:***
  Cuando en primer lugar se recibe el capital y luego se va devolviendo a lo largo del tiempo.

Las inversiones se pueden clasificar desde distintos puntos de vista, nosotros utilizaremos la siguiente:

- ***Inversiones reales:***
  Cuando se trata de activos físicos tales como edificios, maquinaria, equipo de oficina, etc. Este tipo de inversiones suele clasificarse como operaciones a largo plazo.

- ***Inversiones financieras:***
  Cuando se concretan en títulos de valores, y por lo regular se realizan en horizontes económicos cortos.

El esquema gráfico de una inversión es:



En el que:

- **C_0** es el desembolso inicial que genera la inversión.
- ***R_s***, con ***$s=1,2,3,\ldots,n$***, son los rendimientos netos futuros que produce la inversión en cada uno de los períodos de maduración.
- ***n***, es la duración u horizonte económico de la inversión.

CRITERIOS DE DECISIÓN PARA LA ELECCIÓN DE INVERSIONES

Existen diversos criterios para la elección de inversiones. Los más destacados son:

- ***Valor Actual Neto (VAN):***
- ***Tasa Interna de Rentabilidad (TIR):***

Ambos criterios son métodos de evaluación de activos que:

- Establecen la equivalencia financiera en el punto de origen.
- Resumen toda la información de la inversión en una sola cuantía.
- Permiten conocer si una inversión es aceptable o no.
- Ordena y selecciona inversiones según su beneficio actual esperado.

VALOR ACTUAL NETO (VAN)

Se define como el valor actual de la renta que forman los rendimientos netos restándole el capital inicial que se desembolsa en el origen.

Su especificación matemática es:

$$VAN = -C_0 + \sum_{s=1}^{n} R_S * (1+i)^{-S}$$

El resultado obtenido de esta expresión se denomina ***beneficio actual neto esperado*** de cualquier inversión. Por tanto el VAN permite:

Conocer si la inversión es aceptable (VAN>0) o no (VAN>0)

Por tanto, si los rendimientos netos forma una renta constante:

$$VAN = R * a_{n\neg i} - C_0$$

Si los rendimientos netos forma una renta variable tendríamos:

$$VAN = A(C;q)_{n\neg i} - C_0$$

Progresión Geométrica

$$VAN = A(C;r)_{n\neg i} - C_0$$

Progresión Aritmética

TASA INTERNA DE RENTABILIDAD (TIR)

Es el tanto que iguala financieramente los rendimientos netos de la inversión al desembolso efectuado en el momento inicial (C_0).

La TIR se obtiene despejando la siguiente igualdad:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} R_S * (1 + TIR)^{-S}$$

La TIR de una inversión es la rentabilidad anual por unidad monetaria invertida. Este tema se retomará al final del tema III.

Casos Prácticos

Ejemplo Nº 20
Una empresa necesita establecer el orden de preferencia de dos inversiones aplicando el criterio VAN. La cuantía inicial es de 100.000 euros, tienen la misma duración (5años) y el tipo de interés efectivo anual es del 15%.

		Rendimientos Netos Anuales				
Inversión	**Co**	**R1**	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**
A	100.000	40.000	40.000	40.000	40.000	40.000
B	100.000	20.000	30.000	40.000	50.000	60.000

Solución aplicando el VAN

Inversión A: Rendimientos de una ***renta constante*** (40.000)

$$VAN = R * a_{n\neg i} - C_0$$

$$VAN = 40.000 * a_{5\neg 0.15} - 100.000$$

$$= 40.000 * \frac{1-(1+0,15)^{-5}}{0,15} - 100.000$$

$$= 40.000 * 3,3521551 - 100.000$$

$$= 34.086,20 \text{ €}$$

Inversión B: Rendimientos de una renta variable en progresión aritmética de ***r =10.000***

$$VAN = A(C;r)_{n\neg i} - C_0$$

$$= A(20.000;10.000)_{5\neg 15\%} - 100.000$$

$$= \left(20.000 + \frac{10.000}{0,15}\right) * a_{5\neg 0,15} - \frac{10.000 * 5 * (1+0,15)^{-5}}{0,15} - 100.000$$

$$= (86.666,67 * 3.3521551 - 165.725,578) - 100.000$$

$$= 24.794,53 \quad €$$

Tema III. OPERACIONES FINANCIERAS

III.1 Concepto y Clasificación de Operaciones Financieras

Concepto

Es un intercambio no simultáneo de capitales financieros entre las partes que intervienen en dicho proceso de tal forma que los compromisos o acuerdos sean equivalentes.

Por tanto, el concepto de operación financiera exige:

- Debe existir cualquier temporabilidad o ***duración*** de la operación.
- Intervendrán más de ***dos partes*** (físicas o jurídicas).
- Introducción de dos nuevos conceptos: ***prestación y contraprestación***.

Clasificación

Existen distintas perspectivas de clasificación de las Operaciones Financieras, las más importantes son:

1º Por el número de capitales
- Operaciones Simples
- Operaciones Compuestas

2º Por su duración
- Operaciones a corto plazo
- Operaciones a largo plazo

3º Por la ley financiera

- **Operaciones de capitalización**
- **Operaciones de descuento**

4º Por el objetivo

- **Operaciones de financiación**
- **Operaciones de inversión**

III.2 Equivalencia financiera

En ***TODA*** operación financiera los ***compromisos acordados*** (prestación y contraprestación) entre dos partes deberán ser ***EQUIVALENTES***.

Es decir, una vez concertada una de las 5 leyes financieras de valoración, la suma total de los capitales financieros de la prestación deberán ser iguales a la suma de los capitales financieros de la contraprestación.

Representado matemáticamente:

$$\sum_{s=1}^{n} C_s * (1+i)^{-n_s} = \sum_{s=1}^{m} C`_s * (1+i)^{-n`_s}$$

III.3 Saldo Financiero

El saldo financiero en un momento ***t*** del transcurso de la operación financiera ***es el capital que mide la diferencia*** entre la contraprestación y la prestación ya cumplidos por las partes.

La ecuación de la equivalencia de la operación financiera en ***t*** es:

$$S_1 - S_2 = S'_1 + S'_2 \Rightarrow S_1 - S'_1 = S'_2 - S_2 = R_t$$

Por tanto, el capital $(R_t ; t)$ es el saldo de la operación cuya cuantía (R_t) puede obtenerse de dos formas distintas:

Por diferencia entre los compromisos pasados: $S_1 - S'_1$

Por diferencia entre los compromisos futuros: $S'_2 - S_2$

Bibliografía:

- De Pablo López, Andres (2002). “Valoración Financiera”. Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A. Tercera Edición.
- Mendoza Resco, Carmen (2009). “Matemáticas Financieras”. UAM Ediciones.
- Navarro, Eliseo y Nave, Juan (2001). “Fundamentos de Matemáticas Financieras”. Editor Antoni Bosch.